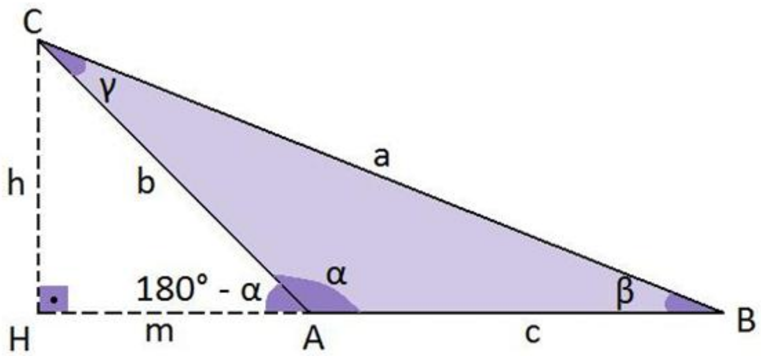
Lei dos Cossenos

Consideremos um triângulo de lados a,b e c. Temos duas possibilidades: ou o triângulo é acutângulo ou é obtusângulo. Vejamos:

Triângulo Obtusângulo

Tomemos um triângulo Obtusângulo qualquer, conforme abaixo



Podemos escrever

$$m = b.\cos(180° - \alpha) = b.(-\cos\alpha) = -b.\cos\alpha$$

$$h = b.\cos(180° - \alpha) = b.\cos\alpha$$

Utilizando o teorema de Pitágoras obtemos

$$a^2 = h^2 + (c+m)^2 = b^2\cos^2\alpha + c^2 + 2.c.(-b.\cos\alpha) + b^2\operatorname{sen}^2\alpha$$

E então

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos\alpha \qquad (1)$$

Também podemos escrever

$$m = a.\cos\beta - c$$

$$h = a.\operatorname{sen}\beta$$

E teremos

$$b^2 = m^2 + h^2 = a^2.\cos^2\beta - 2.c.a.\cos\beta + c^2 + a^2.\operatorname{sen}^2\beta$$

Portanto,

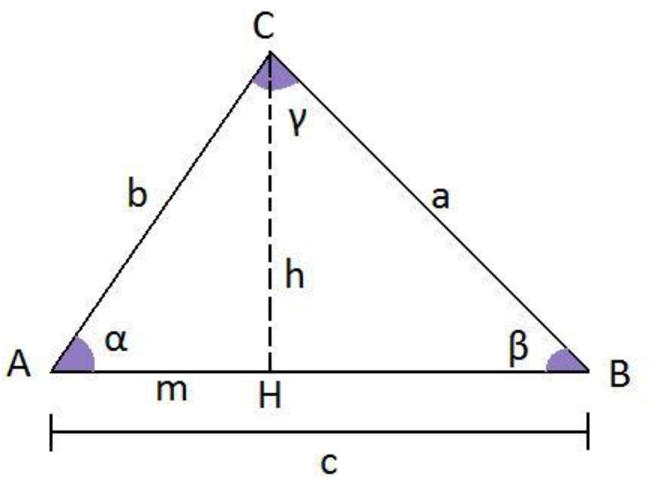
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2.a.c.\cos\beta \qquad (2)$$

Mudando a posição do triângulo obtusângulo, podemos mostrar de forma análoga como fizemos para a expressão (2), que considera o ângulo agudo β que:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b.\cos\gamma \qquad (3)$$

Triângulo Acutângulo

Se, por outro lado, tomarmos um triângulo acutângulo teremos:



$$h = a.\sin\beta$$

$$m = c - a.\cos\beta$$

Também,

$$b^2 = h^2 + m^2 = a^2.\sin^2\beta + c^2 - 2.c.a.\cos\beta + a^2.\cos^2\beta$$

De onde concluímos que,

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2.a.c.\cos\beta \qquad (4)$$

Mudando a posição do triângulo acutângulo, podemos mostrar de forma análoga como fizemos para a expressão (4), que considera o ângulo agudo β que:

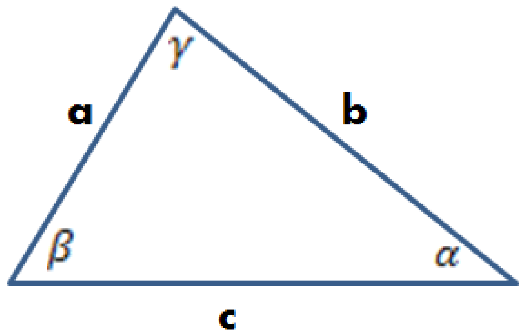
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b.\cos\gamma \qquad (5)$$

E

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos\alpha \qquad (6)$$

As expressões (1), (2), (3), (4), (5) e (6) nos demonstram a **Lei dos Cossenos** que afirma que:

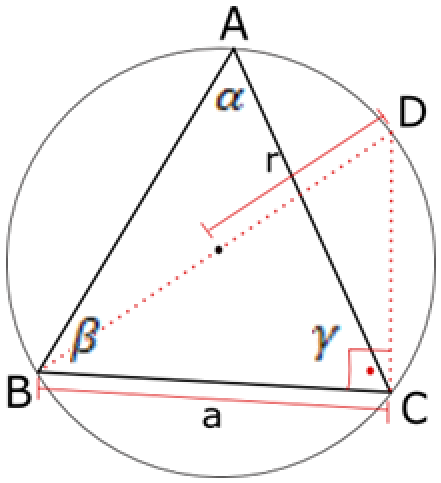
Em qualquer triângulo, o quadrado da medida de um lado é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados menos duas vezes o produto das medidas desses lados e do cosseno do ângulo determinado por eles.



- $a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos\alpha$
- $b^2 = a^2 + c^2 - 2.a.c.\cos\beta$
- $c^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b.\cos\gamma$

Lei dos Senos

Se tomarmos um triângulo ABC qualquer, sabemos da Geometria que sempre é possível inscrevê-lo numa circunferência, conforme a figura abaixo:



Se traçarmos uma reta que passa pelo vértice B e pelo centro da circunferência, a intersecção desta reta com a circunferência nos fornece o ponto D. Usando novamente resultados da geometria temos que:

- O ΔBDC é retângulo
- O ângulo $B\hat{A}C$ é congruente ao ângulo α $(B\hat{A}C)$ pois os dois determinam a mesma corda na circunferência traçada.

Então

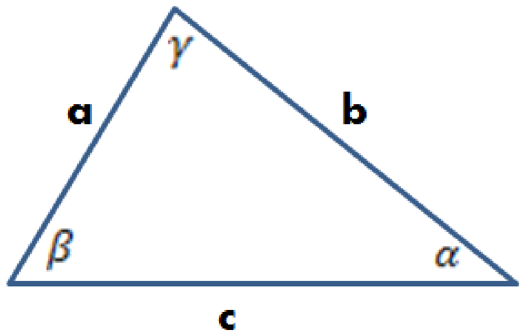
$$\sin(B\hat{A}C) = \sin\alpha = \frac{a}{2r} \Rightarrow 2r = \frac{a}{\sin\alpha}$$

Utilizando a mesma construção para os outros lados do triângulo temos que

$$2r = \frac{b}{\sin\beta} \qquad e \qquad 2r = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Com estes resultados, demonstramos a chamada **Lei dos Senos** que afirma que:

Em qualquer triângulo, as medidas dos lados são proporcionais aos senos dos ângulos opostos.

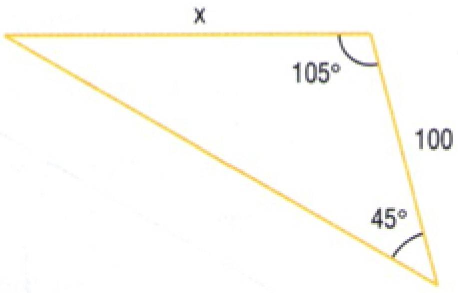


$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r$$

Exercícios

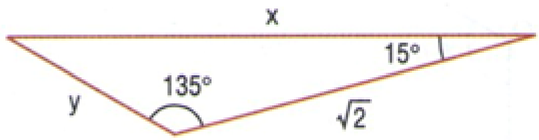
<u>Lei dos Senos</u>

1) Na figura abaixo, calcule o valor da medida x.



Resposta: $100\sqrt{2}$

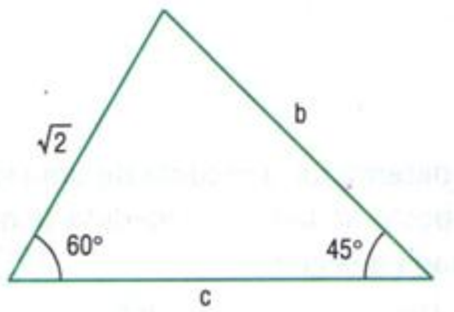
2) No triângulo abaixo, determine as medidas de x e y.



Resposta: $x = 2; y = \sqrt{3} - 1$

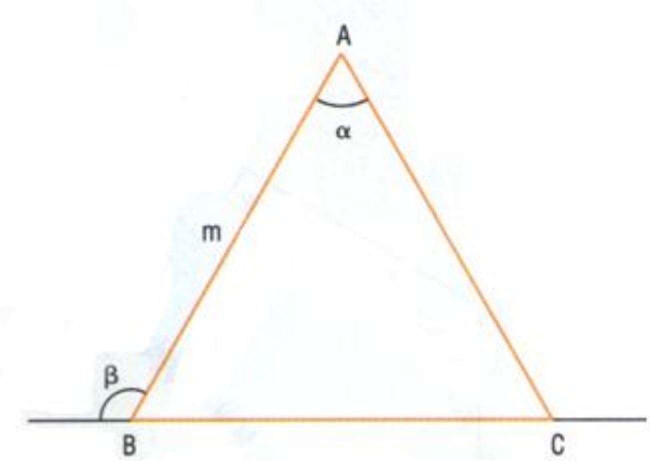
3) Em um triângulo isóceles, a base mede 6 cm e o ângulo oposto à base mede $120°$. Qual é a medida dos lados congruentes do triângulo?
Resposta: $2\sqrt{3}$ cm.

4) No triângulo da figura abaixo, calcule as medidas de b e c.



Resposta: $b = \sqrt{3}; c = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$

5) A figura abaixo mostra um triângulo isóceles de base $\overline{BC}$. Calcule a medida da base $\overline{BC}$, admitindo conhecidos m,α e β.



Resposta:$\frac{m.\text{sen}\,\alpha}{\text{sen}\,\beta}$

6) Calcular o raio r da circunferência circunscrita a um triângulo ABC em que uma lado a mede 15 cm, e o ângulo $\hat{A}$ oposto a esta lado mede $30°$.
Resposta:$r = 15$ cm

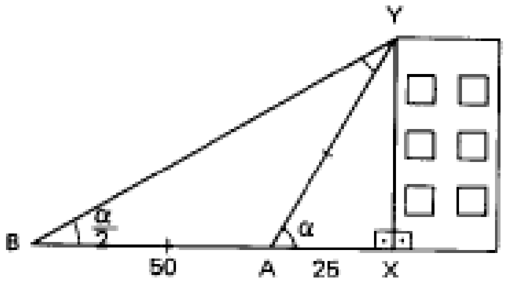
7) Calcular os lados b e c de um triângulo ABC no qual $a = 10$, $\hat{B} = 30°$ e $\hat{C} = 45°$.
Resposta:$b = \frac{20}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$, $c = \frac{20\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$

8) Quais são os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$ de um triângulo ABC para o qual $\hat{A} = 15°$, e $\text{sen}\,\hat{B} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\text{sen}\,\hat{C} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
Sugestão: repare que a relação $\frac{\text{sen}\,\hat{B}}{\text{sen}\,\hat{C}}$ indica qual deve ser o maior lado (ou b ou c).Lembre-se que, num triângulo obtusângulo o ângulo obtuso é oposto ao maior lado.
Resposta: $\hat{B} = 120°$ e $\hat{C} = 45°$.

9) Calcular os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$ de um triângulo ABC em que $a = 1$, $b = \sqrt{3} + 1$, e $\hat{A} = 15°$.
Resposta: $\hat{B} = 45°$ e $\hat{C} = 120°$ ou $\hat{B} = 135°$ e $\hat{C} = 30°$

10) Em um triângulo ABC, sabe-se que a=2b e $\hat{C} = 60°$. Calcular os outros 2 ângulos.
Resposta:$90°$ e $30°$.

11) Um observador colocado a 25m de um prédio vê um edifício sob certo ângulo. Afastando-se em linha reta mais 50 m, nota que o ângulo de visualização é metade do anterior. Qual é a altura do edifício?
Lembrete: Num triângulo qualquer um ângulo externo, suplementar ao ângulo de um dos vértices, é igual a soma dos outros dois ângulos internos não adjacentes a ele.

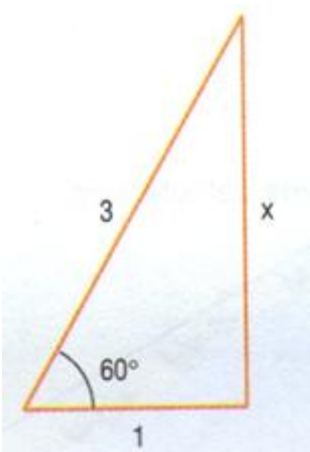


Resposta: $25\sqrt{3}$ m.

12) Num triângulo qualquer, suponha conhecidos o perímetro p, e a medida dos ângulos adjacentes (β e γ) a um lado de medida x. Expresse a medida do lado x em função dos ângulos $\beta\ e\ \gamma$ e do perímetro.
Resposta:$x = \frac{2p.\text{sen}(\beta+\gamma)}{\text{sen}(\beta+\gamma)+\text{sen}(\beta)+\text{sen}(\gamma)}$

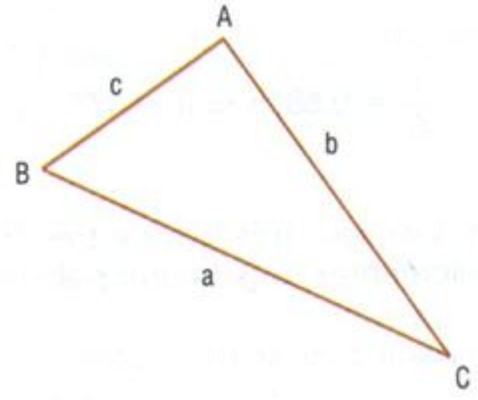
Lei dos cossenos

13) No triângulo abaixo, calcule a medida de x.



Resposta:$\sqrt{7}$

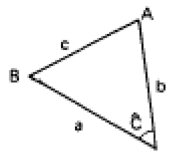
14) No triângulo da figura abaixo são dados: $a = 4$, $b = 3\sqrt{2}$, e $\hat{C} = 45°$. Calcule a medida c.



Resposta: $\sqrt{10}$.

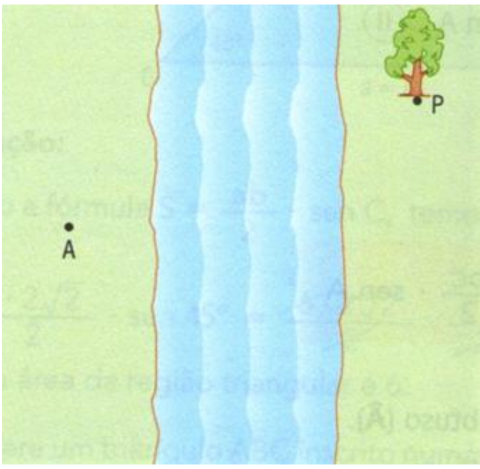
15) Dois lados de um triângulo medem 8 m e 12 m e formam entre si um ângulo obtuso de $120°$. Qual é a medida do terceiro lado?
Resposta: $4\sqrt{19}$ m

16) (FEI-77) Calcular c sabendo que, $a = 4$, $b = 3\sqrt{2}$, $\hat{C} = 45°$.

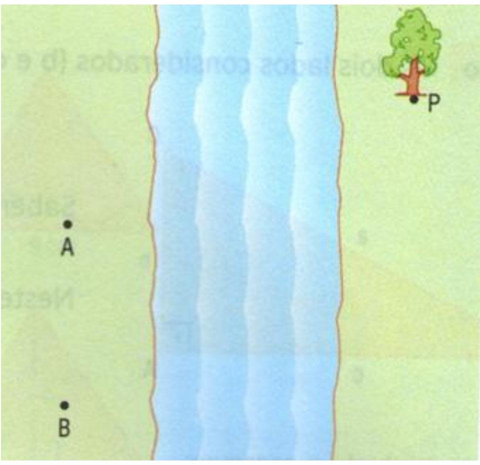


Resposta: $\sqrt{10}$

17) Na figura abaixo um observador está no ponto A e quer saber a distância entre o ponto onde ele está e uma árvore situada do outro lado do rio.



O observador se locomove de A para B, de onde avista também a árvore (no ponto P).



Qual é a distãncia de A a P sabendo que a distância de A até B é de 2 km, a medida do ângulo $B\hat{A}P$ é igual a $120°$e a medida do ângulo $A\hat{B}P$é igual a $45°$?
Resposta:Aproximadamente 5459 m.

18) (MAPOFEI - 76) Dois lados consecutivos de um paralelogramo medem 8 cm e 12 cm e formam um ângulo de $60°$. Calcular o comprimento das diagonais.
Resposta:diagonal menor=$4\sqrt{7}$; diagonal maior=$4\sqrt{19}$ m.

19) Dois lados de um triângulo medem $\sqrt{3}$ cm e 4 m. O ângulo entre estes lados mede $30°$. Qual é a medida do terceiro lado deste triângulo?
Resposta:$\sqrt{7}$ m.

20) Calcular o lado c de um triângulo ABC sendo dados $\hat{A} = 120°,\ b = 1, \frac{a}{c} = 2.$
Resposta:$c = \frac{-1+\sqrt{13}}{6}$

21) Calcular os três ângulos internos de um triângulo que tem lados com medidas $2, \sqrt{6}, e\ \sqrt{3} + 1$.
Resposta:$45°, 60°\ e\ 75°$.

22) (EPUSP-56)Os lados de um triângulo são dados pelas expressões:
$$a = x^2 + x + 1,\ \ b = 2x + 1,\ \ \ c = x^2 - 1$$
Demonstre que um dos ângulos do triângulo mede $120°$.

Referências

Dante, L. Roberto. Matemática: Contexto e aplicações. Volume 1. Ed. 3. Impressão 1. Editora Ática. São Paulo.2003.

Iezzi, Gelson (e outros). Fundamentos de Matemática Elementar. Volume 3. Ed Atual. São Paulo. 1977.