Função Seno

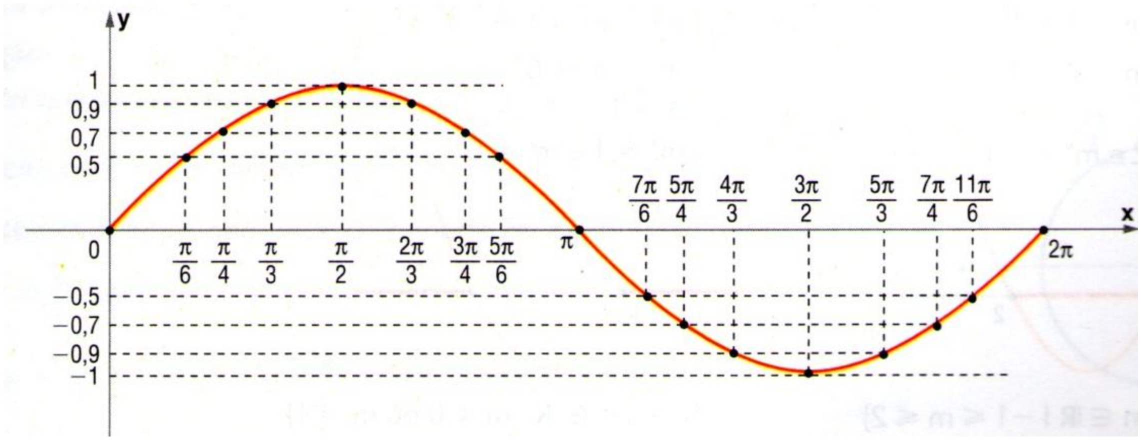
Dado um número real x, podemos associar a ele o valor do seno de um arco que possui medida de x radianos. Desta forma, podemos definir uma função cujo domínio é o conjunto dos números reais que, a cada x dado associa o valor de $sen\,x$.

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

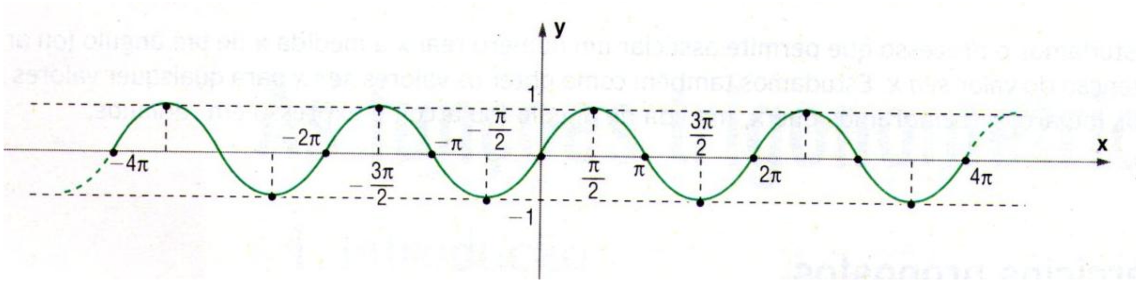
$$x \rightarrow f(x) = sen\,x$$

Gráfico da Função Seno

Para construir o gráfico da função seno, inicialmente podemos tabelar os valores do seno para alguns valores múltiplos dos ângulos de medidas notáveis. Teremos um gráfico conforme ilustrado abaixo:



Note que o gráfico acima considera valores no domínio somente no intervalo $[0,2\pi]$, mas o domínio da função pode ser estendido a todos os números reais. Ampliando o intervalo no domínio da função obtemos o gráfico de uma curva chamada senóide, conforme ilustrado abaixo:



Pela análise do gráfico da função seno temos conclusões importantes:

I) O domínio da função seno é todo o conjunto dos números reais :$D(senx) = \mathbb{R}$

II) A imegem da função seno está totalmente contida no intervalo $[-1,1]$

III) A função seno não é injetora.

IV) Se considerarmos que o contradomínio da função é o conjunto dos números reais, a função seno não é sobrejetora.

V) A função seno é uma função impar. Chamamos uma função $f(x)$ de ímpar se para qualquer valor de x do domínio ocorrer $f(x) = -f(-x)$, e no caso da função seno temos, de fato, que $-sen(-x) = -\big(-sen(x)\big) = sen(x)$

VI) A função $f(x) = sen\, x$ é periódica e seu período é 2π. Isto decorre do fato de que $sen\, x = sen(x + 2k\pi)$, com k um número inteiro.

<u>Outras funções construídas a partir da função seno</u>

Podemos pensar na função seno, inserindo alguns parâmetros fixos em sua expressão e verificando o que ocorre com o domínio, a imagem e o período para a nova função criada.

Por exemplo, vamos determinar o domínio, a imagem, o período e fazer o gráfico da função $f(x) = sen(4x)$.

O domínio desta função continua sendo todo o conjunto dos números reais, pois para qualquer valor de x, o arqumento $4x$ continua sendo um número real.

A expressão $sen(k)$ seno sempre retorna um valor entre -1 e 1, para qualquer valor de k real. A expressão $sen\, 4x$, e, portanto, a função $f(x)$ somente produzirão valores no intervalo $[-1,1]$. Então $Im(f(x)) = [-1,1]$.

Para determinar o período, podemos encontrar o "tamanho" h do menor intervalo para o qual $f(x) = f(x + h)$, para qualquer valor de x que tomarmos no domínio.

Sabemos que se $f(x) = f(x + h)$ então $sen(4x) = sen(4x + 4h)$ e então

$$4x + 4h = 4x + 2k\pi \qquad com\ k\ inteiro$$

$$4h = 2k\pi$$

$$h = \frac{k\pi}{2}$$

O inteiro que minimiza a expressão $\frac{k\pi}{2}$ sem zerá-la é $k = 1$.

Portanto $h = \frac{\pi}{2}$, é o período da nova função.

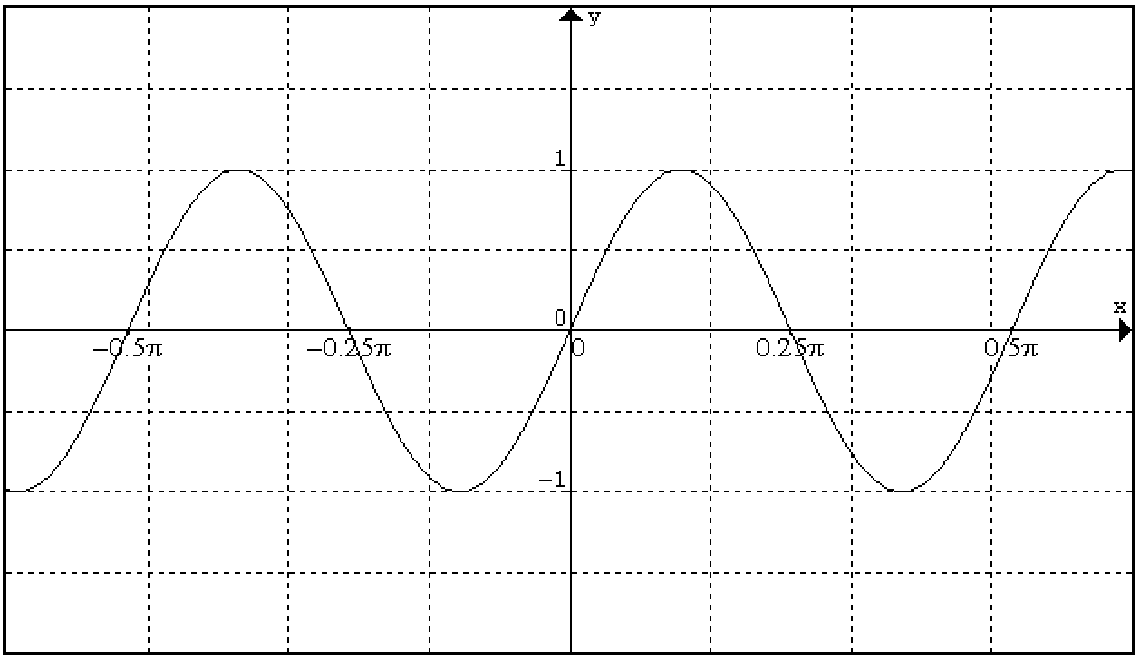
Para fazer o gráfico da função, vamos escolhe convenientemente os valores a serem tabelados. Já sabemos que basta esboçar a função no intervalo entre 0 e $\frac{\pi}{2}$, pois o período da função é $\frac{\pi}{2}$.

Escolhendo valores covenientes para a tabela obtemos:

x	$4x$	$sen\ 4x$	$aproximação\ para\ sen\ 4x$
0	0	0	0
$\frac{\pi}{24}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	0,5
$\frac{\pi}{16}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0,7
$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0,9
$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$	1	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0,9
$\frac{3\pi}{16}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0,7
$\frac{5\pi}{24}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	0,5
$\frac{\pi}{4}$	π	0	0
$\frac{7\pi}{24}$	$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	-0,5
$\frac{5\pi}{16}$	$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-0,7
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-0,9
$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{2}$	-1	-1
$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-0,9
$\frac{7\pi}{16}$	$\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-0,7
$\frac{11\pi}{24}$	$\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	-0,5
$\frac{\pi}{2}$	2π	0	0

Note que, para esboçar o gráfico da função não precisaríamos escolher tantos pontos, basta nos concentrarmos nos pontos de máximo e mínimo e nos pontos onde a função zera.

Gerando o gráfico da função num sistema de eixos ortogonais obtemos:



Função Cosseno

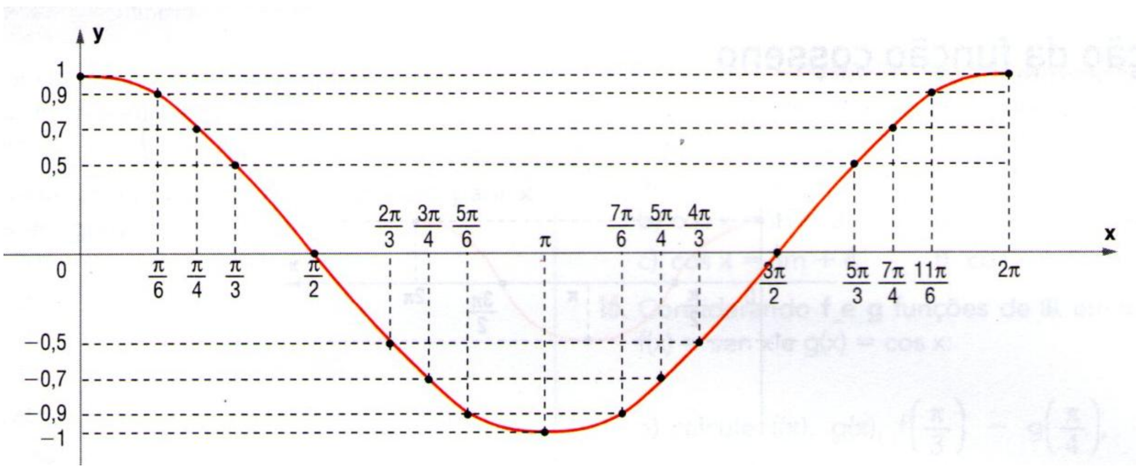
Assim como fizemos no caso do seno, dado um número real x, podemos associar a ele o valor do cosseno de um arco que possui medida de x radianos. Desta forma, podemos definir uma função cujo domínio é o conjunto dos números reais que, a cada x dado associa o valor de $cos\ x$.

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

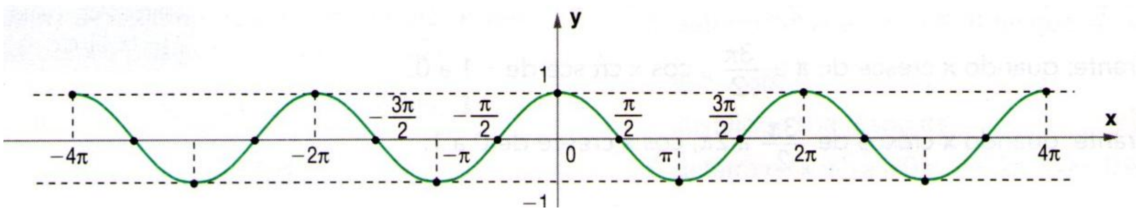
$$x \rightarrow f(x) = cos\ x$$

<u>Gráfico da Função Cosseno</u>

Para construir o gráfico da função cosseno, inicialmente podemos tabelar os valores do cosseno para alguns valores múltiplos dos ângulos de medidas notáveis. Teremos um gráfico conforme ilustrado abaixo:



Note que o gráfico acima considera valores no domínio somente no intervalo $[0,2\pi]$, mas o domínio da função pode ser estendido a todos os números reais. Ampliando o intervalo no domínio da função obtemos o gráfico de uma curva chamada cossenóide, conforme ilustrado abaixo:



Pela análise do gráfico da função cosseno temos conclusões importantes:

I) O domínio da função cosseno é todo o conjunto dos números reais :$D(\cos x) = \mathbb{R}$

II) A imegem da função cosseno está totalmente contida no intervalo $[-1,1]$

III) A função cosseno não é injetora.

IV) Se considerarmos que o contradomínio da função é o conjunto dos números reais, a função cosseno não é sobrejetora.

V) A função cosseno é uma função par. Chamamos uma função $f(x)$ de par se para qualquer valor de x do domínio ocorrer $f(x) = f(-x)$, e no caso da função cosseno temos, de fato, que $cos(x) = \cos(-x)$

VI) A função $f(x) = cos\ x$ é periódica e seu período é 2π. Isto decorre do fato de que $cos\ x = cos(x + 2k\pi)$, com k um número inteiro.

Função Tangente

Assim como fizemos no caso do seno e do cosseno, dado um número real x, podemos associar a ele o valor da tangente de um arco que possui medida de x radianos. Desta forma, podemos definir uma função no conjunto dos números reais que, a cada x dado associa o valor de $tg\ x$.

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

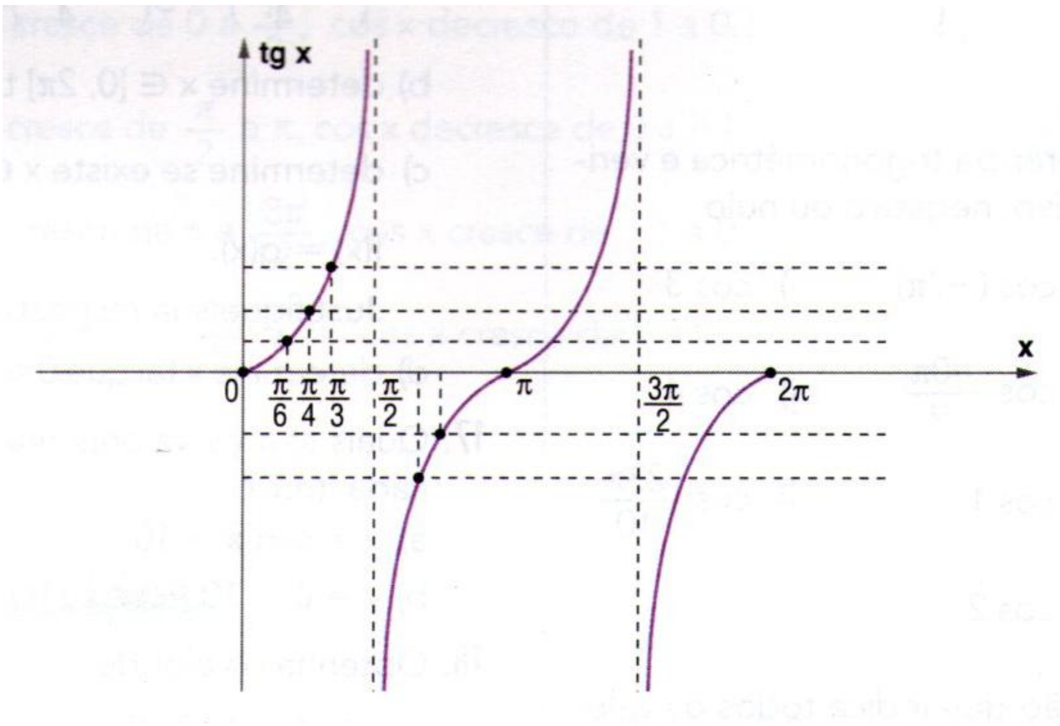
$$x \to f(x) = tg\ x$$

Note que o domínio da função não é o conjunto dos números reais uma vez que a função tangente não está definida nos pontos onde o cosseno se anula, ou seja, nos números reais do tipo $\frac{\pi}{2} + k\pi$, com k natural.

Então , se $f(x) = tg\ x$, o $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\ , \forall\ k \in \mathbb{Z}\}$.

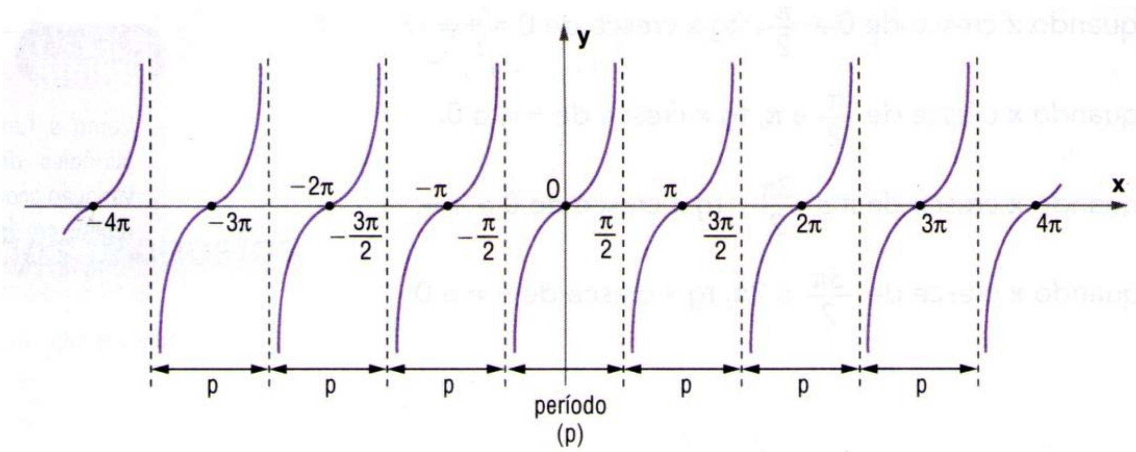
<u>Gráfico da Função Tangente</u>

Para construir o gráfico da função tangente, inicialmente podemos tabelar os valores da tangente para alguns valores múltiplos dos ângulos de medidas notáveis. Teremos um gráfico conforme ilustrado abaixo:



A medida em que x tende a valores para os quais a tangente não está definida $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\ e\ seus\ arcos\ congruentes\right)$o gráfico da tangente tende ao infinito (positivo ou negativo). As retas verticais tracejadas nestes valores são chamadas de **assíntotas**. São retas das quais o gráfico da função se aproxima cada vez mais sem interceptar.

Note que o gráfico acima considera valores do domínio somente no intervalo $[0,2\pi]$, mas o domínio da função pode ser estendido a todos os números reais. Ampliando o intervalo no domínio da função obtemos o gráfico conforme ilustrado abaixo:



Pela análise do gráfico da função tangente temos conclusões importantes:

I) O domínio da função tangente é :$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\ , \forall\ k \in \mathbb{Z}\}$
II) A imagem da função tangente é todo o conjunto dos números reais.
III) A função tangente não é injetora.
IV) Se considerarmos que o contradomínio da função é o conjunto dos números reais, a função tangente é sobrejetora.
V) A função tangente é uma função impar.
VI) A função $f(x) = tg\ x$ é periódica e seu período é π, ou seja $tg\ x = tg(x + k\pi)$, com k um número inteiro.

Função Cotangente

Assim como fizemos no caso do seno e do cosseno e da tangente, dado um número real x, podemos associar a ele o valor da cotangente de um arco que possui medida de x radianos. Desta forma, podemos definir uma função no conjunto dos números reais que, a cada x dado associa o valor de $cotg\ x$.

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

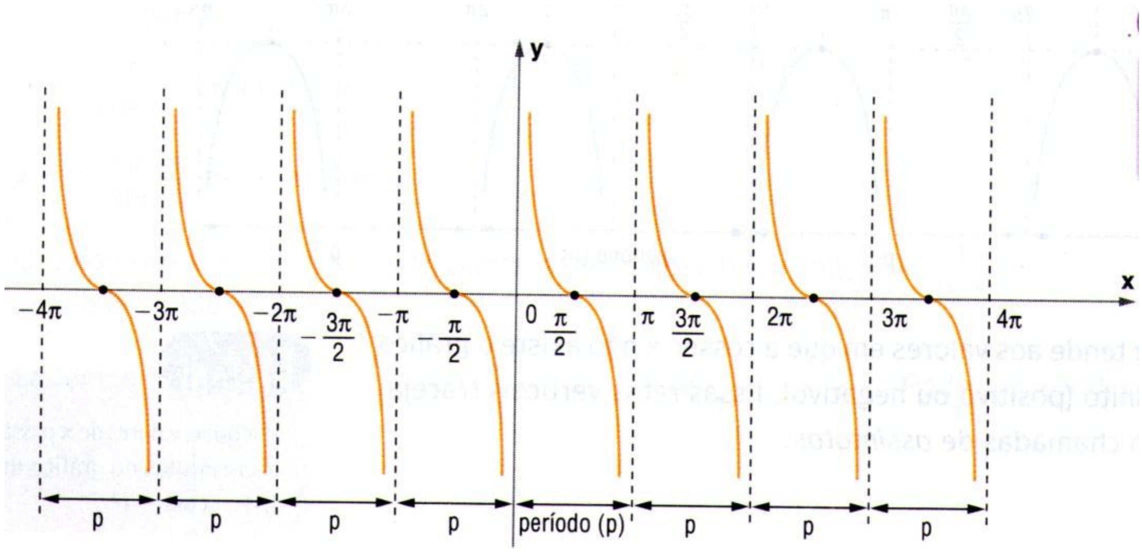
$$x \to f(x) = cotg\ x$$

Note que o domínio da função não é o conjunto dos números reais uma vez que a função cotangente não está definida nos pontos onde o seno se anula, ou seja, nos números reais do tipo $k\pi$, com k natural.

Então , se $f(x) = cotg\ x$, o $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi , \forall\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Gráfico da Função Cotangente

Para construir o gráfico da função cotangente, inicialmente podemos tabelar os valores da cotangente para alguns valores múltiplos dos ângulos de medidas notáveis. Teremos um gráfico conforme ilustrado abaixo:



A medida em que x tende a valores para os quais a cotangente não está definida $(0, \pi\ e\ seus\ arcos\ congruentes)$ o gráfico da cotangente tende ao infinito (positivo ou negativo). As retas verticais tracejadas nestes valores são chamadas de **assíntotas**.

Pela análise do gráfico da função cotangente temos conclusões importantes:

I) O domínio da função cotangente é :$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi , \forall\, k \in \mathbb{Z}\}$
II) A imagem da função cotangente é todo o conjunto dos números reais.
III) A função cotangente não é injetora.
IV) Se considerarmos que o contradomínio da função é o conjunto dos números reais, a função cotangente é sobrejetora.
V) Assim como a tangente, a função cotangente é uma função impar.
VI) A função $f(x) = cotg\, x$ é periódica e seu período é π, ou seja $cotg\, x = cotg(x + k\pi)$, com k um número inteiro.

Função Secante

Assim como fizemos no caso das outras relações trigonométricas, dado um número real x, podemos associar a ele o valor da secante de um arco que possui medida de x radianos. Desta forma, podemos definir uma função no conjunto dos números reais que, a cada x dado associa o valor de $sec\, x$.

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

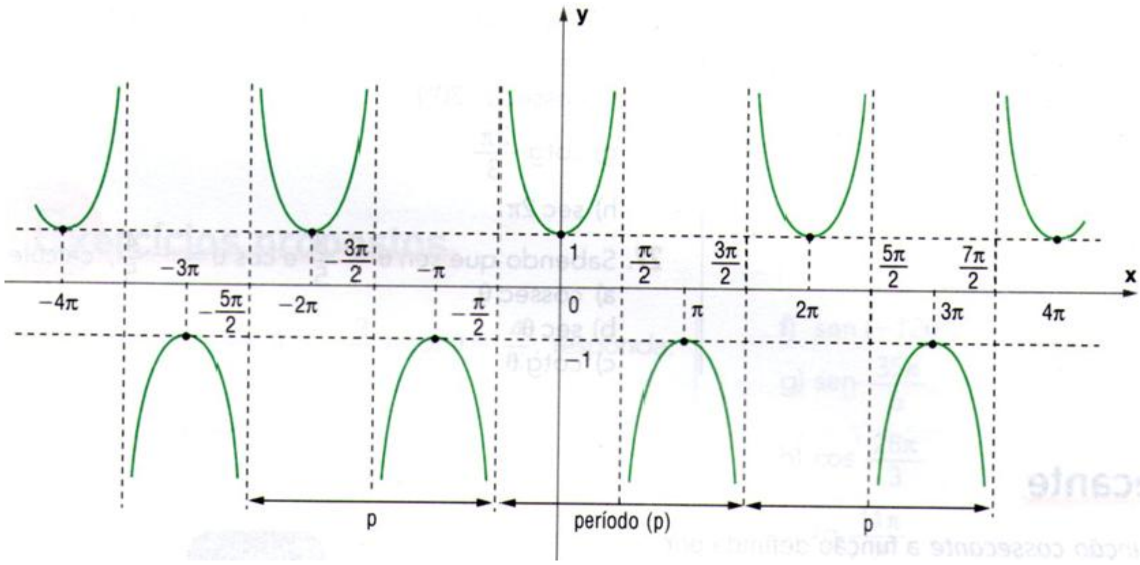
$$x \to f(x) = sec\, x$$

Note que o domínio da função não é o conjunto dos números reais uma vez que a função secante não está definida nos pontos onde o cosseno se anula, ou seja, nos números reais do tipo $\frac{\pi}{2} + k\pi$, com k natural.

Então , se $f(x) = sec\, x$, o $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi , \forall\, k \in \mathbb{Z}\}$.

Gráfico da Função Secante

Para construir o gráfico da função secante, inicialmente podemos tabelar os valores da secante para alguns valores múltiplos dos ângulos de medidas notáveis. Teremos um gráfico conforme ilustrado abaixo:



A medida em que x tende a valores para os quais a secante não está definida $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\ e\ seus\ arcos\ congruentes\right)$ o gráfico da secante tende ao infinito (positivo ou negativo). As retas verticais tracejadas nestes valores são chamadas de **assíntotas**.

Pela análise do gráfico da função secante temos conclusões importantes:

I) O domínio da função secante é :$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\ , \forall\ k \in \mathbb{Z}\}$

II) A imagem da função secante é dada pelo conjunto: $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\ ou\ x \leq -1\}$.

III) A função secante não é injetora.

IV) Se considerarmos que o contradomínio da função é o conjunto dos números reais, a função secante não é sobrejetora.

V) Assim como a função cosseno, a função secante é uma função par.

VI) A função $f(x) = sec\ x$ é periódica e seu período é 2π (pois este é o período da função $cos\ x$), ou seja $sec\ x = sec(x + 2k\pi)$, com k um número inteiro.

Função Cossecante

Assim como fizemos no caso das outras relações trigonométricas, dado um número real x, podemos associar a ele o valor da cossecante de um arco que possui medida de x radianos. Desta forma, podemos definir uma função no conjunto dos números reais que, a cada x dado associa o valor de $cossec\ x$.

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

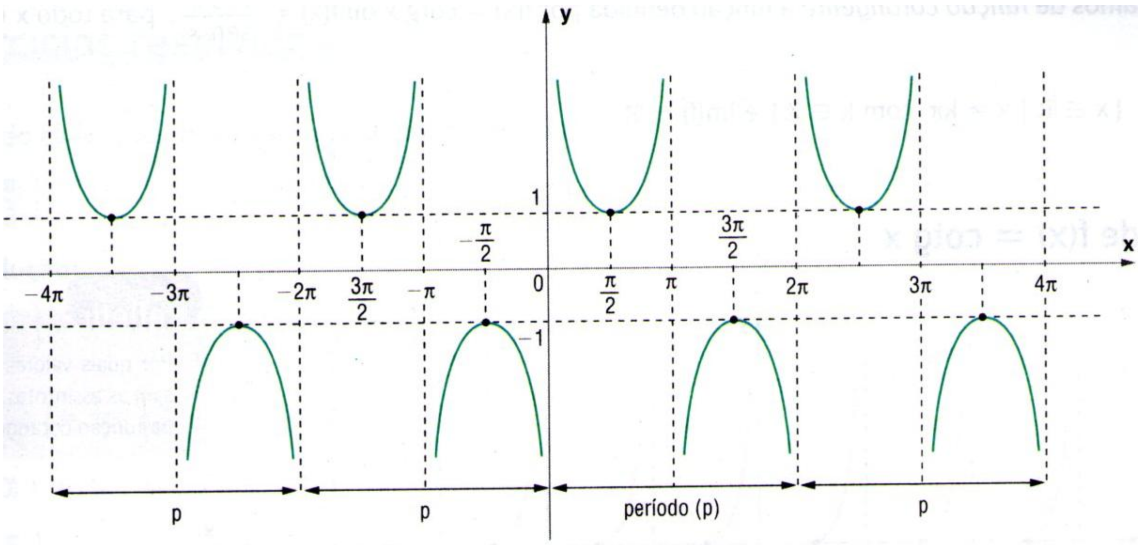
$$x \to f(x) = cossec\ x$$

Note que o domínio da função não é o conjunto dos números reais uma vez que a função cossecante não está definida nos pontos onde o seno se anula, ou seja, nos números reais do tipo $k\pi$, com k natural.

Então , se $f(x) = sec\ x$, o $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi , \forall\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Gráfico da Função Cossecante

Para construir o gráfico da função cossecante, inicialmente podemos tabelar os valores da cossecante para alguns valores múltiplos dos ângulos de medidas notáveis. Teremos um gráfico conforme ilustrado abaixo:



A medida em que x tende a valores para os quais a cossecante não está definida $(0, \pi\ e\ seus\ arcos\ congruentes)$ o gráfico da cossecante tende ao infinito (positivo ou negativo). As retas verticais tracejadas nestes valores são chamadas de **assíntotas**.

Pela análise do gráfico da função cossecante temos conclusões importantes:

I) O domínio da função cossecante é :$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi , \forall\ k \in \mathbb{Z}\}$

II) A imagem da função cossecante é dada pelo conjunto: $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1 \; ou \; x \leq -1\}$.

III) A função cossecante não é injetora.

IV) Se considerarmos que o contradomínio da função é o conjunto dos números reais, a função cossecante não é sobrejetora.

V) Assim como a função seno, a função secante é uma função ímpar.

VI) A função $f(x) = cossec\, x$ é periódica e seu período é 2π (pois este é o período da função $sen\, x$), ou seja $cossec\, x = cossec(x + 2k\pi)$, com k um número inteiro.

Exercícios

1) Para quais quadrantes do ciclo trigonométrico temos:

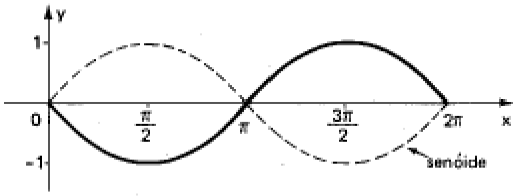
    a. A função seno positiva
    b. A função cosseno positiva
    c. A função seno negativa
    d. A função tangente positiva

2) Para quais quadrantes do ciclo trigonométrico temos:

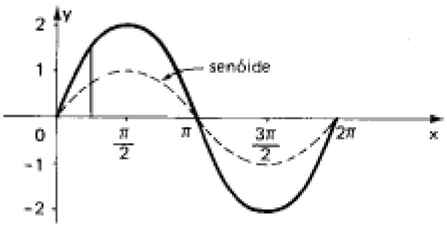
    a. A função seno crescente
    b. A função seno decrescente
    c. A função cosseno crescente
    d. A função cosseno decrescente
    e. A função tangente crescente
    f. A função tangente decrescente

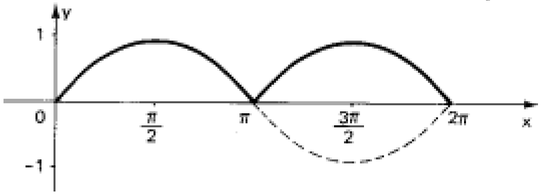
3) Esboce o gráfico, determine o período o domínio e a imagem das funções dadas abaixo

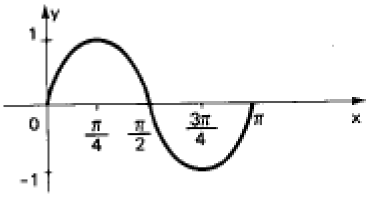
    a. $f(x) = -senx$
    Resposta:$D(f) = \mathbb{R}$;$Im(f) = [-1,1]$;Período=2π
    Esboço:

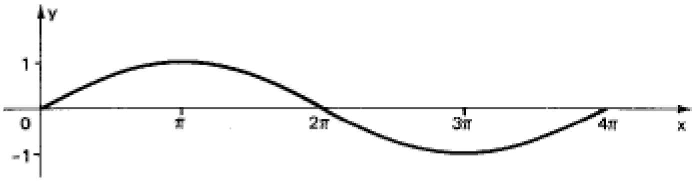


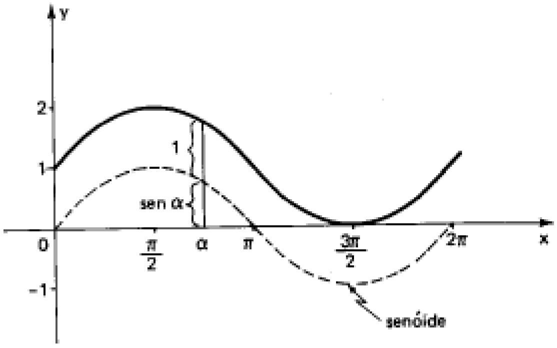
    b. $f(x) = 2senx$
    Resposta:$D(f) = \mathbb{R}$;$Im(f) = [-2,2]$;Período=2π
    Esboço:



c. $f(x) = |senx|$
Resposta:$D(f) = \mathbb{R}$;$Im(f) = [0,1]$;Período=π
Esboço:


d. $f(x) = sen(2x)$
Resposta:$D(f) = \mathbb{R}$;$Im(f) = [-1,1]$;Período=π
Esboço:


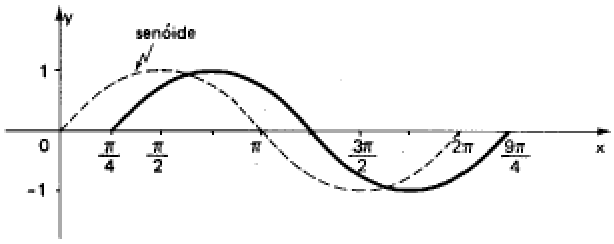
e. $f(x) = sen\left(\frac{x}{2}\right)$
Resposta:$D(f) = \mathbb{R}$;$Im(f) = [-1,1]$;Período=4π
Esboço:


f. $f(x) = 1 + sen(x)$
Resposta:$D(f) = \mathbb{R}$;$Im(f) = [0,2]$;Período=2π
Esboço:


g. $f(x) = sen\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

Resposta:$D(f) = \mathbb{R}$;$Im(f) = [-1,1]$;Período=2π

Esboço:



4) Sendo a, b, c e d números reais e positivos, determinar a imagem e o período da função a valores reais dada por $f(x) = a + bsen(cx + d)$.
Resposta: $Im(f) = [-b + a, b + a]$;Período=$\frac{2\pi}{c}$

5) Determine os valores reais que m pode assumir para que exista um número real x que satisfaça a igualdade $sen\ x = 2m - 3$.
Resposta:$\{m \in \mathbb{R}\ |1 \leq m \leq 2\}$

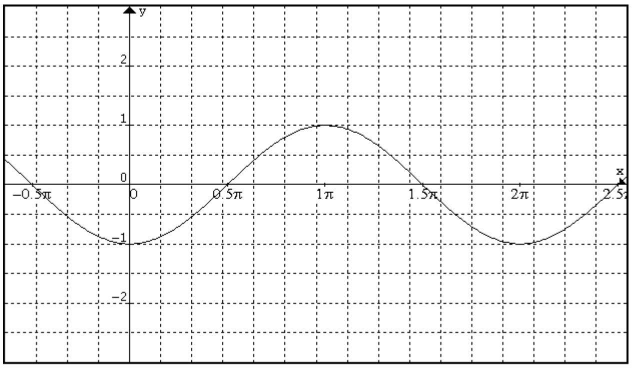
6) Determine os valores reais que m pode assumir para que exista um número real x que satisfaça a igualdade $sen\ x = m^2 - m - 1$.
Resposta:$\{m \in \mathbb{R}\ |1 \leq m \leq 0\ ou\ 1 \leq m \leq 2\}$

7) Esboce o gráfico, determine o período o domínio e a imagem das funções dadas abaixo

a. $f(x) = -cosx$

Resposta:$D(f) = \mathbb{R}$;$Im(f) = [-1,1]$;Período=2π

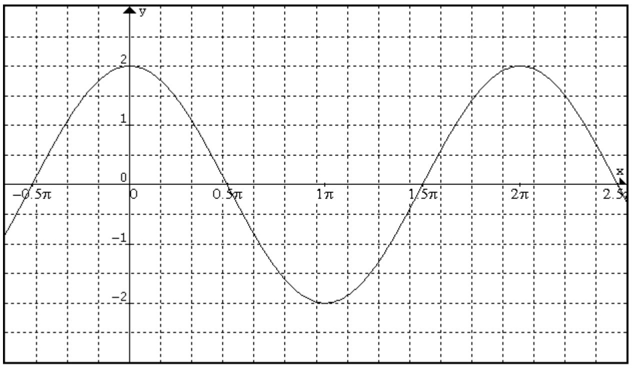
Esboço:



b. $f(x) = 2cosx$

Resposta: $D(f) = \mathbb{R}$; $Im(f) = [-2,2]$; Período $= 2\pi$

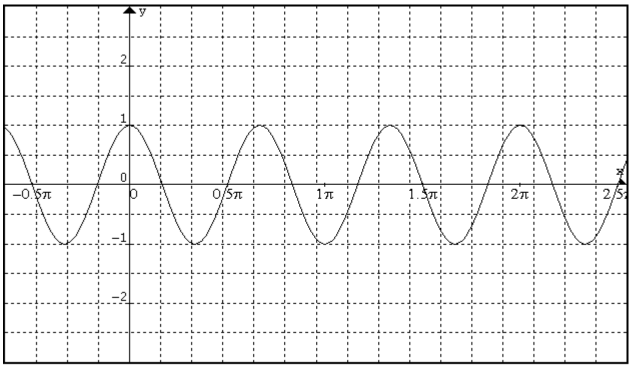
Esboço:



c. $f(x) = \cos(3x)$

Resposta: $D(f) = \mathbb{R}$; $Im(f) = [0,1]$; Período $= \frac{2\pi}{3}$

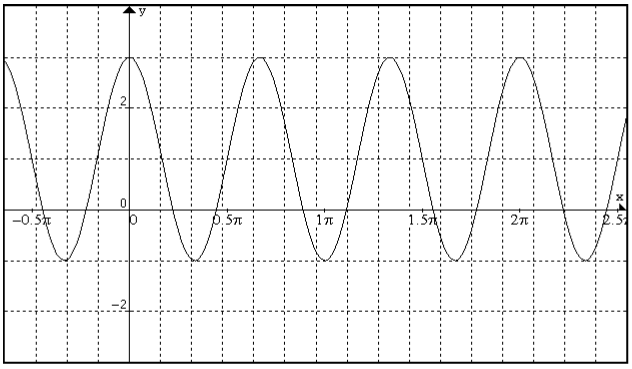
Esboço:



d. $f(x) = 1 + 2\, sen(3x)$

Resposta: $D(f) = \mathbb{R}$; $Im(f) = [-1,3]$; Período $= \frac{2\pi}{3}$

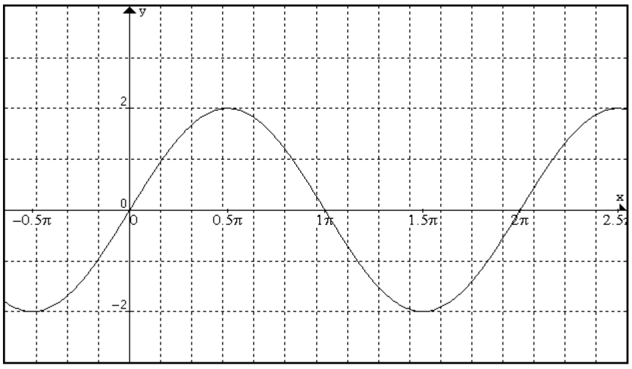
Esboço:



e. $f(x) = 2\,cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

Resposta:$D(f) = \mathbb{R}$;$Im(f) = [-2,2]$;Período=2π

Esboço:



8) Determine os valores reais de m para que exista um número real x que satisfaça as seguintes igualdades:

a. $\cos x = 2m + 5$
Resposta: $\{m \in \mathbb{R} \mid -3 \leq m \leq -2\}$
b. $\cos x = 3m + 4$
Resposta: $\{m \in \mathbb{R} \mid -\frac{5}{3} \leq m \leq -1\}$
c. $\cos x = 1 - m^2$
Resposta: $\{m \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{2} \leq m \leq \sqrt{2}\}$

9) Quais são os valores máximo e mínimo de y em cada ítem abaixo?

a. $y = sen\,x - 10$ (Resposta: 9 e -11)
b. $y = 6 - 10\cos x$ (Resposta: 16 e 4)
c. $y = 3\cos^2 x + 1$ (Resposta:1 e 4)
d. $y = sen\,x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$(Resposta:-2 e 2)

10) Determine o sinal da expressão $y = sen\,107° + \cos 107°$
Resposta: positivo

11) Determine o sinal de
a. $y = sen\,45° + \cos 45°$(Resposta: positivo)
b. $y = sen\,225° + \cos 225°$(Resposta: negativo)
c. $y = sen\frac{7\pi}{4} + \cos\frac{7\pi}{4}$(Resposta: nulo)
d. $y = sen\,300° + \cos 300°$(Resposta: negativo)

12) Determine o domínio e o período da função $f(x) = tg\ 4x$.
Resposta: $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4}\ , \forall\ k \in \mathbb{Z}\}$. Período=$\frac{\pi}{4}$.

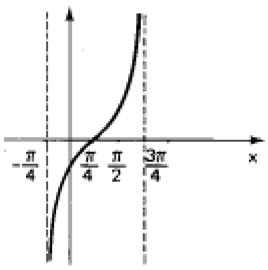
13) Determine o domínio e o período da função $f(x) = tg\frac{x}{2}$.
Resposta: $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \pi + 2k\pi\ , \forall\ k \in \mathbb{Z}\}$. Período=$2\pi$.

14) Determine o domínio e o período da função $f(x) = tg\frac{x}{2}$.
Resposta: $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{5\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}\ , \forall\ k \in \mathbb{Z}\}$. Período=$\frac{\pi}{2}$.

15) Determine o sinal das expressões:
a. $tg\ 269° - sen\ 178°$ (Resposta: positivo)
b. $tg\frac{12\pi}{7}.\left(sen\frac{5\pi}{11} + cos\frac{23\pi}{7}\right)$(Resposta: negativo)

16) Esboce o gráfico, dê o domínio e o período da função a valores reais $f(x) = tg\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Resposta:$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{3\pi}{4} + k\pi\ , \forall\ k \in \mathbb{Z}\}$.Período=$\pi$

Esboço: 

17) Determine o domínio e o período da função $f(x) = cotg\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$
Resposta: $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{3} + k\pi\ , \forall\ k \in \mathbb{Z}\}$, período=$\pi$.

18) Determine o domínio e o período da função $f(x) = sec(2x)$
Resposta: $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi\ , \forall\ k \in \mathbb{Z}\}$, período=$\pi$.

19) Determine o domínio e o período da função $f(x) = cossec\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$
Resposta: $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{4} + 2k\pi\ , \forall\ k \in \mathbb{Z}\}$, período=$2\pi$.

20) Em cada um dos casos abaixo, determinar o conjunto ao qual m deve pertencer de modo que exista x satisfazendo a igualdade:

a. $cotg\, x = \sqrt{2-m}$
   Resposta: $\{m \in \mathbb{R}\ | m \leq 2\}$
b. $\sec x = 3m - 2$
   Resposta: $\left\{m \in \mathbb{R}\ |\ m \leq \frac{1}{3}\ ou\ m \geq 1\right\}$

21) Determine o sinal das expressões abaixo
a. $\cos 91° + cossec\, 91°$ (Resposta: positivo)
b. $sen\, 107° + \sec 107°$ (Resposta: negativo)
c. $sec \frac{9\pi}{8} \left(tg\ \frac{7\pi}{6} + cotg \frac{\pi}{7}\right)$(Resposta: negativo)

Referências

Dante, L. Roberto. Matemática: Contexto e aplicações. Volume 1. Ed. 3. Impressão 1. Editora Ática. São Paulo.2003.

Iezzi, Gelson (e outros). Fundamentos de Matemática Elementar. Volume 3. Ed Atual. São Paulo. 1977.